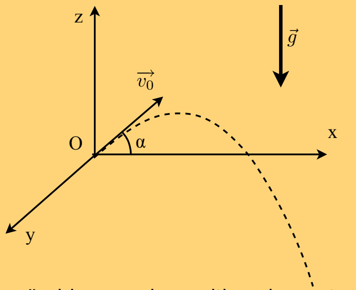
1. Situation 3 : étude du lancer d'une bille

1.1. Mise en équation du problème

On étudie une bille lancée dans un plan (xOz) dans un fluide dont on néglige les effets. La bille est lancée à la date t = 0 s avec une vitesse initiale :

$$\vec{v_0} = \begin{cases} v_{0x} &= v_0 \ \cos(\alpha) \\ v_{0y} &= 0 \\ v_{0z} &= 0 \ \sin(\alpha) \end{cases}$$



On utilise un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que l'origine O coïncide avec la position du centre d'inertie de la bille à t = 0 s. L'axe $(O, \vec{k})$ est dirigé vers le haut.

- Système étudié : la bille
- Référentiel : un référentiel terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces qui s'appliquent sur la bille :
  - forces de l'air sur la bille
  - force de la Terre sur la bille (poids de la bille)
  - on néglige l'action de l'air devant le poids de la bille.

- On applique la 2ème loi de Newon : $\vec{P} = m \ \vec{a}(t)$

Donc $m \ \vec{g} = m \ \vec{a}(t)$

On tire donc $\boxed{\vec{a}(t) = \vec{g}}$ avec $\vec{g} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases}$

1.2. Équations horaires du mouvement

1.2.1. Détermination du vecteur vitesse

On projette la relation vectorielle sur les axes :

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_y(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_z(t)}{dt} &= -g \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) &= A \\ v_y(t) &= B \\ v_z(t) &= -g \ t + C \end{cases}$$

Recherche des primitives

conditions initiales :

À t = 0 s, on a $\begin{vmatrix} v_x(0) = v_0 \cos(\alpha) \\ v_y(0) = 0 \\ v_z(0) = v_0 \sin(\alpha) \end{vmatrix}$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) &= v_0 \ \cos(\alpha) \\ v_y(t) &= 0 \\ v_z(t) &= -g \ t + v_0 \ \sin(\alpha) \end{cases}$$

1.2.2. Détermination du vecteur position du centre d'inertie : équations horaires du mouvement (x(t), y(t), z(t))

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= v_0 \ \cos(\alpha) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -g \ t + \ v_0 \ \sin(\alpha) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = & v_0 \ \cos(\alpha) \ t + A' \\ y(t) = & B' \\ z(t) = & -\frac{1}{2} \ g \ t^2 + \ v_0 \ \sin(\alpha) \ t + \ C' \end{cases}$$

Recherche des primitives

conditions initiales :

À t = 0 s, on a $\begin{vmatrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{vmatrix}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = & v_0 \ \cos(\alpha) \ t \\ y(t) = & 0 \\ z(t) = & -\frac{1}{2} \ g \ t^2 + \ v_0 \ \sin(\alpha) \ t \end{cases}}$$

Conclusions :

- $y(t) = 0$: la trajectoire du centre d'inertie se fait dans le plan (xOz) contenant $\vec{v_0}$.
- $x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t$: le mouvement de la projection du centre d'inertie selon l'axe (Ox) est uniforme.
- $z(t) = -1/2\, g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t$: le mouvement de la projection du centre d'inertie sur l'axe (Oz) est uniformément accéléré.

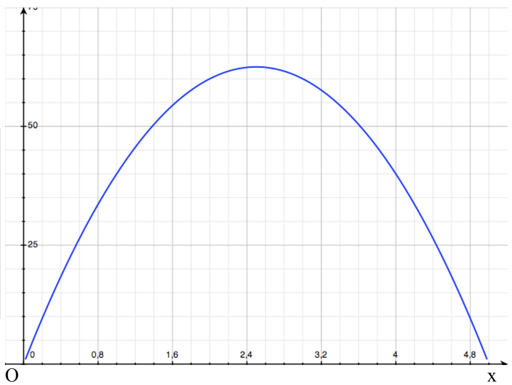
1.3. Équation de la trajectoire

On cherche z(x). Pour cela, on élimine t en utilisant la première équation : $t = x(t)/(v_0 \cos(\alpha))$. Puis on injecte dans z.

L'équation de la trajectoire du centre d'inertie du projectile est donc :

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^{\,2} \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)\, x$$

La trajectoire est une portion de parabole située dans le plan (xOz)



2. Situation 4 : mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Traité comme exercice

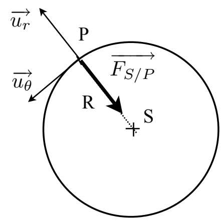
3. Situation 5 : mouvement des satellites et des planètes

- Dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen, on fait l'approximation que la trajectoire de la planète étudiée est un cercle. La planète est soumise à la force gravitationnelle exercée par le soleil, et on néglige les forces exercées par les autres planètes.

- Appliquons la 2è loi de Newton dans le repère $(P, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$:

$$m\ \vec{a} = -G\frac{m\ M_S}{R^2}\ \vec{u_r}$$

avec m la masse de la planète et M_S la masse du soleil

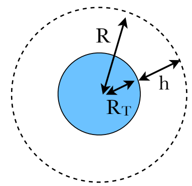


- On projette cette relation sur les axes définis par les vecteurs $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$. Sur l'axe définit par $\vec{u_\theta}$, l'accélération est nulle : on en déduit que $\frac{dv}{dt} = 0$ donc v est constante, donc **le mouvement est uniforme.**

- Sur l'autre axe, on obtient : $\vec{a} = -G\frac{M_S}{R^2}\ \vec{u_r} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r}$ soit $v = \sqrt{G\frac{M_S}{R}}$.

- La période de révolution vaut $T = \frac{d}{v} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\ M_S}}$. Cette expression peut se mettre sous la forme $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G\ M_S}$ qui est la troisième loi de Képler. Ce rapport est une valeur constante, la même pour toutes les planètes du système solaire. On peut la calculer grâce aux donnée du mouvement d'une planète et l'utiliser pour le mouvement d'une autre.

- Pour les satellites terrestre, les expressions sont identiques mais on remplace la masse du soleil par la masse de la Terre et le rayon de l'orbite par la valeur R_T + h (rayon de la Terre plus l'altitude mesurée par rapport à la surface de la Terre). On obtient : $v = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T + h}}$ et $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{G\ M_T}}$.



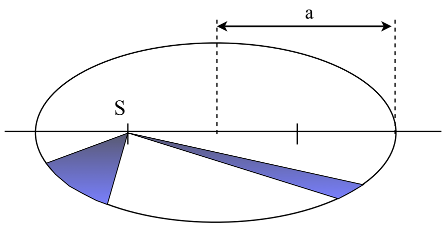
- On observe que dans l'expression de vitesse, la seule grandeur qui peut varier est l'altitude du satellite : plus elle augmente et plus la vitesse du satellite est faible. Résultat qui peut sembler curieux, elle est indépendante de la masse du satellite.

- Dans le cas d'un satellite terrestre artificiel, si on choisit l'altitude de manière que la période T soit exactement de 24 h et s'il est dans le plan de l'équateur, alors il tourne à la même vitesse angulaire que la Terre. Il paraît donc immobile dans le référentiel terrestre, il est **géostationnaire**. Ces satellites servent en télécommunications, pour le réseau de satellites GPS ou Galileo.

4. Les lois de Kepler

1 **La loi des trajectoires**

Dans un référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont le soleil (S) occupe l'un des foyers.



2 **La loi des aires**

Le segment de droite reliant le soleil à la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

Conséquence : les planètes vont plus vite lorsqu'elles sont proches du soleil.

Dans le référentiel héliocentrique, les centres de la plupart des planètes ont une trajectoire circulaire. D'après la seconde loi de Képler, leur mouvement est donc uniforme.

3 **La loi des périodes**

En notant T la période de révolution et a le demi-grand axe de l'ellipse, alors $\frac{T^2}{a^3}$ a la même valeur pour toutes les planètes du système solaire